Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Matemáticas
Nivel superior
Prueba 3 – Análisis

Miércoles 18 de mayo de 2016 (mañana)

1 hora

Instrucciones para los alumnos

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de matemáticas NS y de ampliación de matemáticas NS** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[60 puntos]**.

2216 – 7228

3 páginas

© International Baccalaureate Organization 2016

International Baccalaureate
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

https://xtremepape.rs/

Por favor comience cada pregunta en una página nueva. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente la misma como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. [Puntuación máxima: 17]

La función f se define mediante $f(x) = \mathrm{e}^x \operatorname{sen} x$, $x \in \mathbb{R}$.

(a) Hallando un número apropiado de derivadas de f, determine la serie de Maclaurin para $f(x)$ hasta el término en x^3. [7]

(b) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo, determine el valor exacto de $\lim_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x \operatorname{sen} x - x - x^2}{x^3}$. [3]

(c) La serie de Maclaurin se va a utilizar para hallar el valor aproximado de $f(0{,}5)$.

(i) Utilice la expresión de Lagrange para el término complementario (resto) y halle un límite superior para el valor absoluto del error en esta aproximación.

(ii) A partir del término complementario (resto) de Lagrange, deduzca si la aproximación será mayor o menor que el valor real de $f(0{,}5)$. [7]

2. [Puntuación máxima: 7]

La función f viene dada por $f(x) = \int_0^x \ln(2 + \operatorname{sen} t)\,\mathrm{d}t$.

(a) Escriba $f'(x)$. [1]

(b) Derivando $f\left(x^2\right)$, obtenga una expresión para la derivada de $\int_0^{x^2} \ln(2 + \operatorname{sen} t)\,\mathrm{d}t$ con respecto a x. [3]

(c) A partir de lo anterior, obtenga una expresión para la derivada de $\int_x^{x^2} \ln(2 + \operatorname{sen} t)\,\mathrm{d}t$ con respecto a x. [3]

https://xtremepape.rs/

3. [Puntuación máxima: 9]

(a) Sabiendo que $f(x) = \ln x$, utilice el teorema del valor medio para mostrar que,

para $0 < a < b$,

$$\frac{b-a}{b} < \ln\frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}.$$ [7]

(b) A partir de lo anterior, muestre que $\ln(1{,}2)$ está comprendido entre $\frac{1}{m}$ y $\frac{1}{n}$, donde m, n son números enteros positivos consecutivos que hay que determinar. [2]

4. [Puntuación máxima: 13]

Considere la ecuación diferencial $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x}{y} - xy$ donde $y > 0$ e $y = 2$ para $x = 0$.

(a) Muestre que la sustitución $z = y^2$ transforma a la ecuación diferencial en $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + 2xz = 2x$. [4]

(b) Resuelva esta ecuación diferencial en z y obtenga así una expresión de y en función de x. [9]

5. [Puntuación máxima: 14]

Considere la serie infinita $S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ donde $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,\mathrm{d}t$.

(a) Explique por qué la serie es alternada. [1]

(b) (i) Utilice la sustitución $T = t - \pi$ en la expresión de u_{n+1} para mostrar que $|u_{n+1}| < |u_n|$.

(ii) Muestre que la serie es convergente. [9]

(c) Muestre que $S < 1{,}65$. [4]

https://xtremepape.rs/